

Dowody kombinatoryczne

Udowodnij kombinatoryczne następujące równości. Zakładamy, że wszystkie parametry spełniają niezbędne założenia (np. $n \geq k$).

$$\text{a) } \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k},$$

$$\text{b) } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n,$$

$$\text{c) } \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1},$$

$$\text{d) } \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k},$$

$$\text{e) } \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = 3^n.$$